# Tecnologia para cálculo diferencial e integral de função de uma variável real

*Murilo das Dores Alves*

*Leonardo da Silva Gomes (*)*

**Introdução**

Há hipóteses sobre as causas dos elevados índices de reprovação e evasão verificadas em cursos relacionados ao Cálculo Diferencial e Integral, tais como: dificuldades apresentadas pelos alunos da graduação em relação ao conteúdo da educação básica, formação inadequada do professor de Matemática que atua na educação básica e do professor que atua no ensino superior, escolha de conteúdos e metodologias de ensino de forma equivocada na educação básica e no ensino superior e a não correspondência entre os conceitos do cálculo apresentados aos alunos de forma teórica e suas aplicações na Matemática e em outras ciências.

Para ajudar a resolver problemas de aprendizagem, busca-se inserir no processo ensino-aprendizagem o uso de novas tecnologias como forma de melhorar a compreensão dos conceitos de limite, derivada e integral, fundamentais para uma compreensão significativa do Cálculo Diferencial e Integral.

Consideramos como novas tecnologias o uso de calculadoras gráficas, softwares de geometria dinâmica e planilhas eletrônicas. Segundo Stewart (2013, p.42) "o uso dessas ferramentas nos possibilita esboçar o gráfico de funções mais complicadas e resolver problemas mais complexos, que de outra forma não poderiam ser resolvidos".

Utilizando as novas tecnologias para o ensino da Matemática, este projeto propõe o uso de calculadoras gráficas e outros softwares matemáticos como uma alternativa para diminuir o baixo rendimento dos alunos nas disciplinas de Cálculo, nos mais diversos cursos de graduação. Essas ferramentas podem ajudar no cálculo de limites, derivadas e integrais, possibilitando que o aluno identifique erros e busque diferentes estratégias para chegar a uma

---

(*)*Murilo das Dores Alves* é graduando do Curso Tecnólogo em Tecnologia da Informação e da Comunicação (TIC) da Faculdade de Educação Tecnológica do Estado do Rio de Janeiro (FAETERJ-Petrópolis) e bolsista de iniciação científica, com aporte de recursos da Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro – Faperj.

*Leonardo da Silva Gomes* é mestre em Matemática pelo IMPA (Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada), especialista em Novas Tecnologias no Ensino da Matemática pela UFF (Universidade Federal Fluminense), professor da FAETERJ-Petrópolis e da Secretaria Municipal de Educação de Duque de Caxias-RJ.

resposta satisfatória. Ademais, o uso desses recursos ressignifica o processo de ensino-aprendizagem, possibilitando que o aluno saia de uma aprendizagem passiva para uma aprendizagem ativa, conforme Bianchine (2018):

> Este texto é o resultado de nossos esforços no sentido de retratar a nossa visão do que é ensinar e aprender matemática: uma atividade criativa que não pode e não deve ser baseada exclusivamente em aulas expositivas ou na resolução de extensas listas de exercícios. É uma tentativa, também, de envolver o aluno no processo de fazer matemática, transformando-o de paciente em agente do processo educativo. A ênfase está na compreensão dos conceitos e não somente no desenvolvimento de habilidades mecânicas.

*Calculadora Gráfica* é um tipo de calculadora científica que apresenta uma tela gráfica gradeada com os eixos x e y, onde se podem esboçar o gráfico de funções e outras interações, as quais conheceremos algumas mais adiante. Sua aplicação pode ser encontrada em Aritmética, Álgebra, Cálculo (Funções, Limites, Derivadas, Integrais), Geometria, Trigonometria, Finanças e Estatística.

Dessa forma, este trabalho utilizará as calculadoras gráficas GeoGebra e Desmos para investigar como o uso dessas ferramentas podem contribuir para o ensino do Cálculo em cursos de graduação. O uso do software para traçar gráficos facilitará a visão gráfica das funções, permitindo ao utilizador ter uma percepção mais geométrica de conceitos como limite, derivada e integral.

Inicialmente serão mostrados exemplos de cálculos de Limites, Derivadas e Integrais Definidas e, posteriormente, serão detalhados os passos necessários para efetuar a construção de uma função e como se podem obter os mesmos resultados já calculados manualmente, usando as aplicações web das calculadoras Desmos e ou GeoGebra.

Para propiciar o uso dessas ferramentas, faz-se necessário um breve estudo teórico sobre os conceitos básicos abordados num curso de Cálculo, um estudo sobre o uso das calculadoras gráficas, mostrando como essas ferramentas ajudam na compreensão dos conceitos básicos do Cálculo, além de uma investigação de como a educação matemática tem ajudado a sanar dúvidas relativas a esses conceitos.

Será adotada uma metodologia de pesquisa bibliográfica. Dessa forma, inicialmente, será feito um estudo dos principais conceitos do Cálculo, usando bibliografias de referência nessa área. Em seguida, uma pesquisa das ferramentas presentes nas calculadoras gráficas, Desmos e GeoGebra, que possam contribuir para uma melhor aprendizagem dos conceitos relacionados com a matéria.

**Limites e Calculadoras Gráficas**

Em linhas gerais, *Limite* é o valor para o qual uma função tende, quando o seu domínio se aproxima muito de um determinado número. Por exemplo, o Limite da Função $f(x) = \left(\frac{x-1}{x^2-1}\right)$, quando $x$ tende a 1 é igual a ½ . Ou seja, utilizando-se valores de $x$ próximos a 1, já que este número não faz parte do domínio da função, temos que $f(x)$ se aproxima de ½ . Usando uma tabela, vamos investigar o comportamento da função $f(x)$, para valores de $x$ bem próximos de 1. Vamos utilizar valores menores que 1 e valores maiores que 1.

| $x$ | $f(x) = \left(\frac{x - 1}{x^2 - 1}\right)$ |
|---|---|
| 0.5 | 0,66666667 |
| 0.9 | 0,52631579 |
| 0.99 | 0,50251256 |
| 0.999 | 0,50025013 |

| $x$ | $f(x) = \left(\frac{x - 1}{x^2 - 1}\right)$ |
|---|---|
| 1,5 | 0,4 |
| 1,1 | 0,47619048 |
| 1,01 | 0,49751244 |
| 1,001 | 0,49975012 |

Tabela 1 – Valores de $f(x)$, quando $x$ está próximo de 1.

A tabela nos mostra que, conforme a variável $x$ se aproxima de 1, tanto por valores menores que 1 (à esquerda) e valores maiores que 1 (à direita), mas não necessariamente igual a 1, a função $f(x)$ fica cada vez mais próxima de ½. Sendo assim, podemos dizer que o limite de $f(x)$ tende a ½, quando $x$ tende a 1. Usando a notação de limite:

$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{x-1}{x^2-1}\right) = \frac{1}{2}$$

Segundo Stewart (2013, p.81) "O limite de $f(x)$ quando $x$ tende a $a$, é igual a L, se pudermos tornar os valores de $f(x)$ arbitrariamente próximos de L (tão próximos de L quanto quisermos), tornando $x$ suficientemente próximo de $a$ (por ambos os lados de $a$), mas não iguais a $a$.

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Quando $x$ tende a um número $a$ por valores menores que $a$, temos um limite lateral a esquerda ($\lim_{x \to a^-} f(x) = L$). Quando $x$ tende a um número $a$ por valores maiores que $a$, temos um limite lateral a direita ($\lim_{x \to a^+} f(x) = L$). O número $L$ será o limite da função $f(x)$ se, e somente se, os limites laterais forem iguais a $L$.

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) \Leftrightarrow \lim_{x \to a} f(x) = L$$

Agora vamos explorar o uso do GeoGebra para mostrar o comportamento da função $f(x)$ para valores de $x$ próximos a 1.

1º) Digite $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$ no campo de Entrada em branco e tecle Enter;
2º) Na lacuna em branco, clique em símbolo de "Teclado", depois em "...";
3º) Em $f(x)$ clique em "Tabela" no lado esquerdo, digite os valores próximos do Limite da Função, que são $x = 1$ e ele mesmo;
4º) Depois clique em Álgebra, que está também no lado esquerdo da tela, e aparecerão os pontos $(x, y)$.

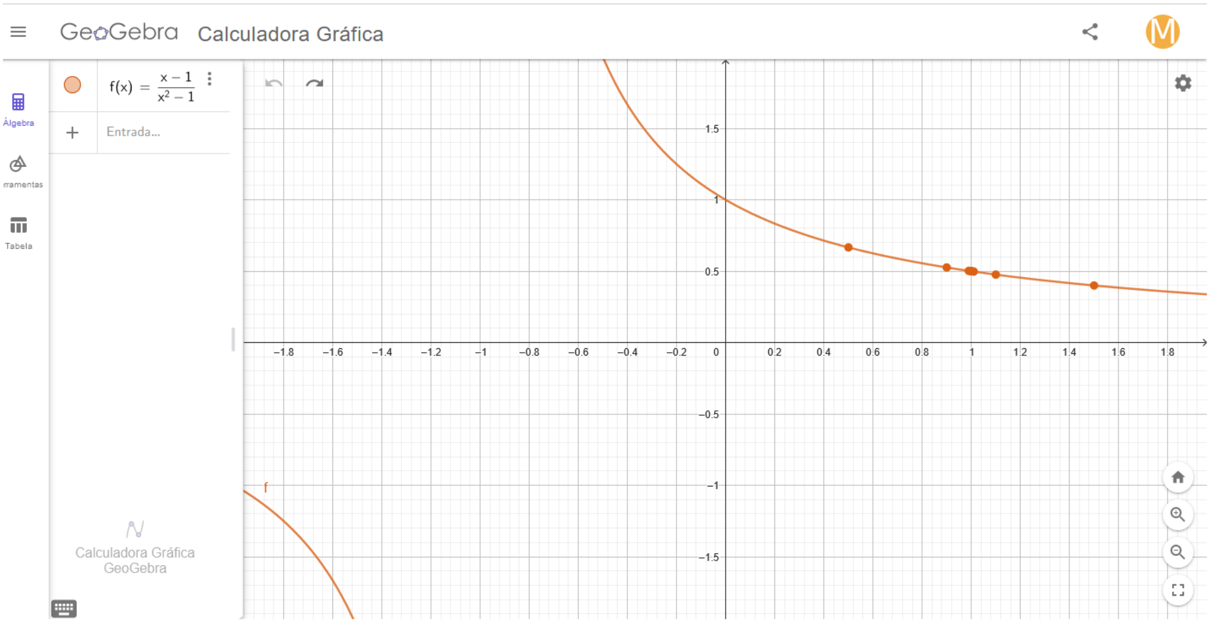


Gráfico 1 – Cálculo de Limite

O gráfico nos mostra que $f(x)$ tende a ½, quando $x$ se aproxima de 1 por valores menores que 1, ou seja, por valores à esquerda de 1. Em notação de limites:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \frac{1}{2}$$

Da mesma forma, o gráfico nos mostra que $f(x)$ tende a ½, quando $x$ se aproxima de 1 por valores maiores que 1, ou seja, por valores à direita de 1. Em notação de limites:

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \frac{1}{2}$$

Como $f(x)$ tende a ½ quando $x$ se aproxima de 1 por valores a esquerda e por valores a direita, podemos dizer que o limite de $f(x)$ tende a ½, quando $x$ tende a 1.

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) \Longrightarrow \lim_{x \to 1} f(x) = \frac{1}{2}$$

O conceito de limite é fundamental para entender os conceitos de derivada e integral, pois esses são casos especiais de limites.

**Derivadas e Calculadoras Gráficas**

Dada uma função contínua $f(x)$, a Derivada de $f(x)$, denotada por $f'(x)$, é a função usada para calcular o coeficiente angular $m$, da reta tangente $y = mx + n$, no ponto $(a, b)$.

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{ou} \quad f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Por exemplo, vamos encontrar a reta tangente à curva $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$, no ponto $x = 2$. Usando a definição acima, temos que

$$f'(2) = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{\frac{x-1}{x^2-1} - \frac{1}{3}}{x - 2} = \frac{\frac{1}{x+1} - \frac{1}{3}}{x - 2} = \frac{\frac{3 - x - 1}{(x+1) \cdot 3}}{x - 2}$$

$$f'(2) = \frac{\frac{2 - x}{3 \cdot (x+1)}}{x - 2} = \frac{-(x-2)}{3 \cdot (x+1)} \cdot \frac{1}{x-2} = -\frac{1}{3 \cdot (x+1)}$$

$$m = f'(2) = -\frac{1}{9}$$

Agora que encontramos o coeficiente angular da reta tangente $y = mx + n$, vamos substituir na equação anterior o coeficiente $m = -1/9$, e o ponto $(2, \frac{1}{3})$.

$$\frac{1}{3}=\left(-\frac{1}{9}\right)\cdot 2+n \Longrightarrow \frac{1}{3}=-\frac{2}{9}+n \Longrightarrow n=\frac{1}{3}+\frac{2}{9}=\frac{5}{9}$$

Logo, a equação da reta tangente, no ponto $(2,\frac{1}{3})$, será $y\ =-\frac{1}{9}x+\frac{5}{9}$.

Existem regras de derivação que são utilizadas para simplificar o cálculo de muitas derivadas. No caso dessa função $f(x)$, temos que usar a regra de derivação de uma função quociente, associada a regra de uma função polinomial:

Se $f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}$, então $f'(x)=\frac{g'(x)\cdot h(x)-g(x)\cdot h'(x)}{g^2(x)}$.

Se $f(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x^1+a_0$, então $f'(x)=a_n\cdot n\cdot x^{n-1}+a_{n-1}\cdot(n-1)\cdot x^{n-2}+\cdots+a_1$.

$$f'(x)=\frac{(1)\cdot(x^2-1)-(x-1)\cdot(2x)}{(x^2-1)^2}=\frac{(x^2-1)-(2x^2-2x)}{(x^2-1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{(x+1)(x-1)-2x(x-1)}{[(x-1)(x+1)]^2}=\frac{(x+1)-2x}{(x-1)(x+1)^2}=\frac{-(x-1)}{(x-1)(x+1)^2}$$

$$f'(x)=-\frac{1}{(x+1)^2}\Longrightarrow f'(2)=-\frac{1}{(2+1)^2}=-\frac{1}{9}$$

Utilizando a definição de derivada ou utilizando as regras de derivação, o trabalho para encontrar o coeficiente angular da reta tangente pode ser demorado e levar ao erro estudantes que não tenham um bom domínio de Álgebra. Dessa forma, utilizar uma calculadora gráfica para chegar ao mesmo resultado pode ajudar na compreensão do conceito e desafiar o estudante a chegar ao mesmo resultado desenvolvendo a definição de derivada ou usando as técnicas de derivação.

Agora vamos encontrar a equação da reta tangente usando a calcula gráfica GeoGebra:

1º) Digite $g(x)=x-1$ no campo de Entrada em branco e tecle Enter;

2º) Repita o primeiro procedimento para $h(x)=x^2-1$ e $f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}$;

2º) Na lacuna em branco, clique em símbolo de "Teclado", depois em "...";

3º) No lado direito de "$Funções\ Matemáticas$", clique em "$Todos\ os\ Comandos$", deslize o mouse, clique em "$Derivada$", depois em "$Derivada(< Função >)$" no lado esquerdo e digite $f(x)$ dentro dos parênteses;

4º) Também clique na bolinha das funções g(x), h(x) e $f'(x)$ para apagar a curva no gráfico;

5º) Em $f(x)$, clique em "Tabela" no lado esquerdo, digite $x = 2$ para encontrar a Equação da Reta Tangente e volte para a tela de "Álgebra". Faça o mesmo para $f'(x)$;

6º) Na entrada em branco, digite $f(2)$ e aperte Enter;

7º) Repita a sétima etapa para $f'(2)$;

8º) Para encontrar "$c$" da Equação da Reta Tangente $f(x) = f'(x).x + c$, digitamos no campo vazio $c = a - (b.2)$, e clique em Enter

9º) Para encontrar a Equação da Reta Tangente na lacuna vazia, é digitado $i(x) = bx + c$, pois já existe $f(x)$ e usa-se $i(x)$ para diferenciar as duas funções, e aperte Enter;

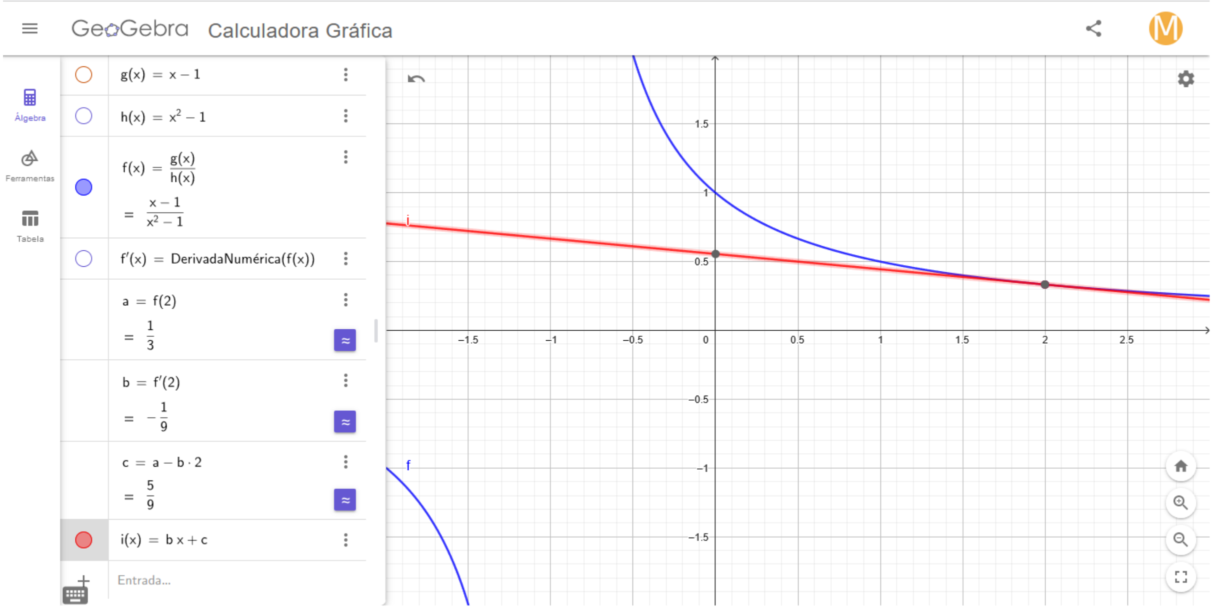


Gráfico 2 – Cálculo da Equação da Reta Tangente na Calcula Gráfica GeoGebra

Agora serão utilizados os passos para a mesma função na calculadora gráfica Desmos:

1º) Digite $g(x) = x - 1$ no campo de Entrada em branco e tecle Enter;

2º) Repita o primeiro procedimento para $h(x) = x^2 - 1$ e $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$;

3º) Vá até o símbolo de "Teclado" à esquerda e depois aperte o botão de "funções";

4º) Deslize o mouse até o grupo de "CÁLCULO" e escolha o símbolo de Derivada "$\frac{d}{dx}$";

5º) Antes de $\frac{d}{dx}$, escreva $i(x)$ e depois $f(x)$, e aperte Enter;

6º) Clique em "+", depois em "Tabela", substitua $x_1$ por $x$ e $y_1$ por $f(x)$. Também adicione a coluna $i(x)$ após $f(x)$ e $j(x)$ após $i(x)$;

9º) Para encontrar “$b$” da Equação da Reta Tangente $f(x) = f'(x).x + b$, digite no campo vazio $b = f(2) - (f'(2).2)$, e clique em Enter;

10º) Para encontrar a Equação da Reta Tangente na lacuna vazia, digite $j(x) = f'(3)x + b$, pois já existe $f(x)$ e usa-se $j(x)$ para diferenciar as duas funções, e aperte Enter;

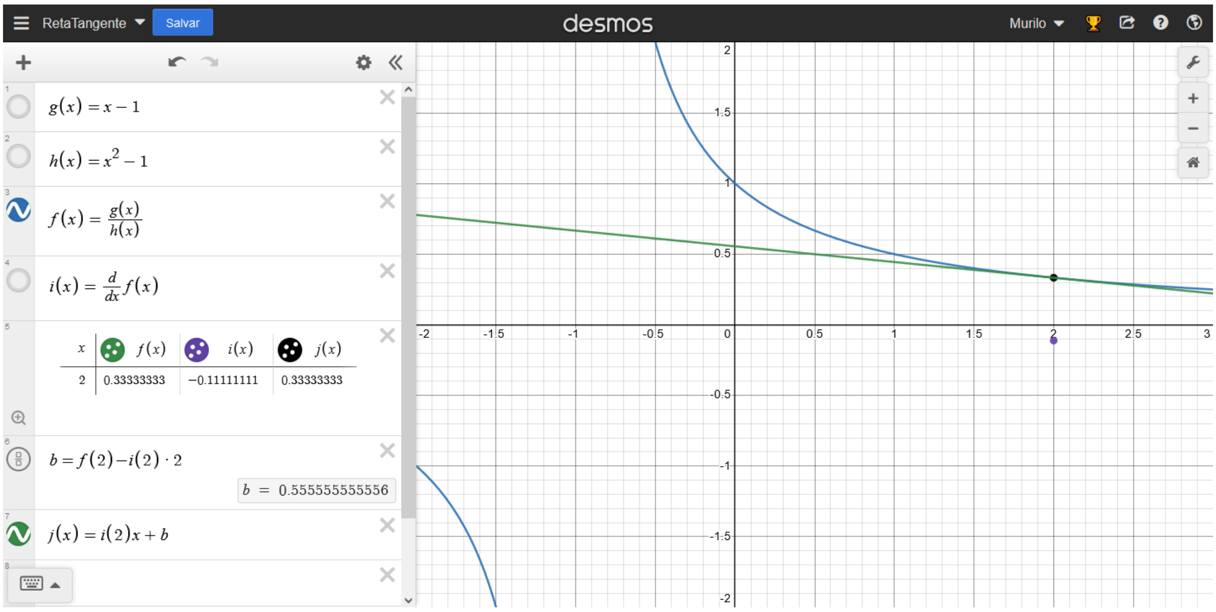


Gráfico 3 – Cálculo da Equação da Reta Tangente na Calcula Gráfica Desmos

A derivada tem diversas aplicações nas mais variadas ciências, vejamos algumas: na Aviação (ponto inicial para um piloto de avião iniciar a descida); Física (velocidade instantânea de uma partícula e densidade instantânea de um objeto), Química (taxa de reação da concentração de um produto em determinado tempo), Biologia (fluxo sanguíneo), Economia (custo marginal), Matemática (função exponencial - crescimento populacional, decaimento radioativo, lei de resfriamento de Newton e juros capitalizados; valores máximo e mínimo de funções, cálculo do arco-íris, teorema do valor médio, formas indeterminadas e Regra de L’Hôspital, esboço de curva, problemas de otimização, método de Newton, e movimento retilíneo).

**Integral Definida e Calculadoras Gráficas**

Seja $f(x)$ uma função contínua num intervalo $[a, b]$. A área sob a curva definida por $f(x)$ e o eixo das abcissas, é calculada através da integral definida de $f(x)$ no intervalo $[a, b]$. Sua notação será

$$\int_{a}^{b} f(x)$$

Para calcular essa integral, vamos dividir o intervalo $[a, b]$ em $n$ subintervalos de comprimento $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Sejam $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ as extremidades desses subintervalos, sendo $x_0 = a$ e $x_n = b$ e, sejam $x_1^*, x_2^*, x_3^*, \dots, x_n^*$ pontos amostrais arbitrários nesses subintervalos, de forma que $x_i^*$ esteja no subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Se o limite a seguir existir, e resultar no mesmo valor para todas as possíveis escolhas de pontos amostrais, então a integral definida de $f(x)$ no intervalo $[a, b]$ será

$$\int_{a}^{b} f(x)\, dx = \lim_{x \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*) \cdot \Delta x$$

Além de ser uma definição complexa, calcular essa soma é um trabalho bem árduo. Historicamente, o problema da reta tangente surgiu de forma separada do problema da área. Foi Isaac Barrow, mentor de Isaac Newton, quem descobriu que derivar e integrar são problemas inversos. Dessa forma, o Teorema Fundamental do Cálculo (TFC) dá-nos a medida exata de como esses dois processos se relacionam. O TFC diz-nos que se $f(x)$ for contínua no intervalo $[a, b]$, então

$$\int_{a}^{b} f(x)\, dx = F(a) - F(b)$$

Seja $F(x)$ qualquer função primitiva de $f(x)$, isto é, $F'(x) = f(x)$. O processo utilizado para encontrar qualquer função primitiva é chamado integral indefinida, e é representado por

$$\int f(x) dx = F(x)$$

Vamos calcular a área sob a curva da função $f(x) = x^3 - 6x$, no intervalo $[0, 3]$. Primeiro precisamos de encontrar uma função $F(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$. Como $f(x)$ é uma função polinomial, podemos pensar de forma inversa em relação à derivada de funções polinomiais, ou seja,

$$\int (a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x^1 + a_0)dx = \frac{a_n \cdot x^{n+1}}{n+1} + \frac{a_{n-1} \cdot x^n}{n} + \cdots + a_0 \cdot x + C$$

Sendo C uma constante qualquer.

$$\int (x^3 - 6x)dx = \frac{x^4}{4} - \frac{6x^2}{2} + C$$

Agora, usando o TFC, temos que:

$$\int_0^3 (x^3 - 6x)\, dx = \left[\frac{3^4}{4} - 3 \cdot 3^2 + C\right] - \left[\frac{0^4}{4} - 3 \cdot 0^2 + C\right]$$

$$\int_0^3 (x^3 - 6x)\, dx = \frac{81}{4} - 27 = -\frac{27}{4} = -6{,}75$$

O resultado negativo indica que a maior parte da área procurada está abaixo do eixo horizontal. Ou seja, temos a soma de um número positivo, representando a área acima do eixo horizontal, com um número negativo, representando a área abaixo do eixo horizontal.

A depender do tipo de problema que estamos resolvendo, pode ser necessário que essa soma ocorra com os módulos de cada área. Então devemos determinar as raízes de $f(x)$ para saber em quais intervalos a curva está abaixo do eixo horizontal e em quais intervalos a curva está acima do eixo horizontal.

Fazendo $x^3 - 6x = 0 \Longrightarrow x(x^2 - 6) = 0 \Longrightarrow x_1 = 0, x_2 = -\sqrt{6}\ e\ x_3 = +\sqrt{6}$. Como queremos a integral no intervalo $[0,3]$, vamos dividir a nossa integral em duas partes:

$$\left|\int_0^3 (x^3 - 6x)\, dx\right| = \left|\int_0^{\sqrt{6}} (x^3 - 6x)\, dx\right| + \left|\int_{\sqrt{6}}^3 (x^3 - 6x)\, dx\right|$$

$$\int_0^{\sqrt{6}} (x^3 - 6x)\, dx = \left[\frac{(\sqrt{6})^4}{4} - 3 \cdot (\sqrt{6})^2 + C\right] - \left[\frac{0^4}{4} - 3 \cdot 0^2 + C\right] = \frac{36}{4} - 18 = -9$$

$$\int_{\sqrt{6}}^3 (x^3 - 6x)\, dx = \left[\frac{3^4}{4} - 3 \cdot 3^2 + C\right] - \left[\frac{\left(\sqrt{6}\right)^4}{4} - 3 \cdot \left(\sqrt{6}\right)^2 + C\right]$$

$$= \left[\frac{81}{4} - 27 + C\right] - \left[\frac{36}{4} - 18 + C\right] = -\frac{27}{4} + \frac{36}{4} = \frac{9}{4}$$

$$\left|\int_0^3 (x^3 - 6x)\,dx\right| = |-9| + \frac{9}{4} = \frac{45}{4}$$

Assim como o cálculo da derivada, o da integral também é muito árduo, levando mais facilmente os estudantes de Cálculo a cometerem erros. E se considerarmos que o cálculo de funções primitivas de funções polinomiais é fácil, os cálculos de primitivas que envolvem outras técnicas de integração, como substituição, por partes ou por frações parciais são mais difíceis e mais trabalhosos também. Isso tornou o uso das calculadoras gráficas ainda mais necessário.

Vamos ver como calcular a integral acima utilizando a calculada gráfica Desmos. As etapas para montar a função na calculadora gráfica são os seguintes:

1º) Digite $f(x) = \int_0^3 x^3 - 6x$ no campo de expressão em branco e tecle Enter;

2º) Clique em "+", depois em "Tabela", substitua $x_1$ por $x$ e $y_1$ por $f(x)$, insira *0* e *3* para variável *x*, e tecle Enter;

3º) Vá até ao símbolo de teclado à esquerda e depois em "funções";

4º) Deslize o mouse até ao grupo de "CÁLCULO" e escolha o símbolo de integral "$\int$".

5º) Digite os intervalos ao lado do símbolo de Integral, e depois a derivada da função que é $d = \int_0^3 f(x)\,dx$ ;

6º) Vá até ao símbolo de teclado à esquerda e depois em "funções";

7º) Deslize o mouse até ao grupo de "CÁLCULO", escolha o símbolo de integral "d/dx", e derive a função *f(x)*, onde $g(x) = f'(x) = -6{,}75$*;*

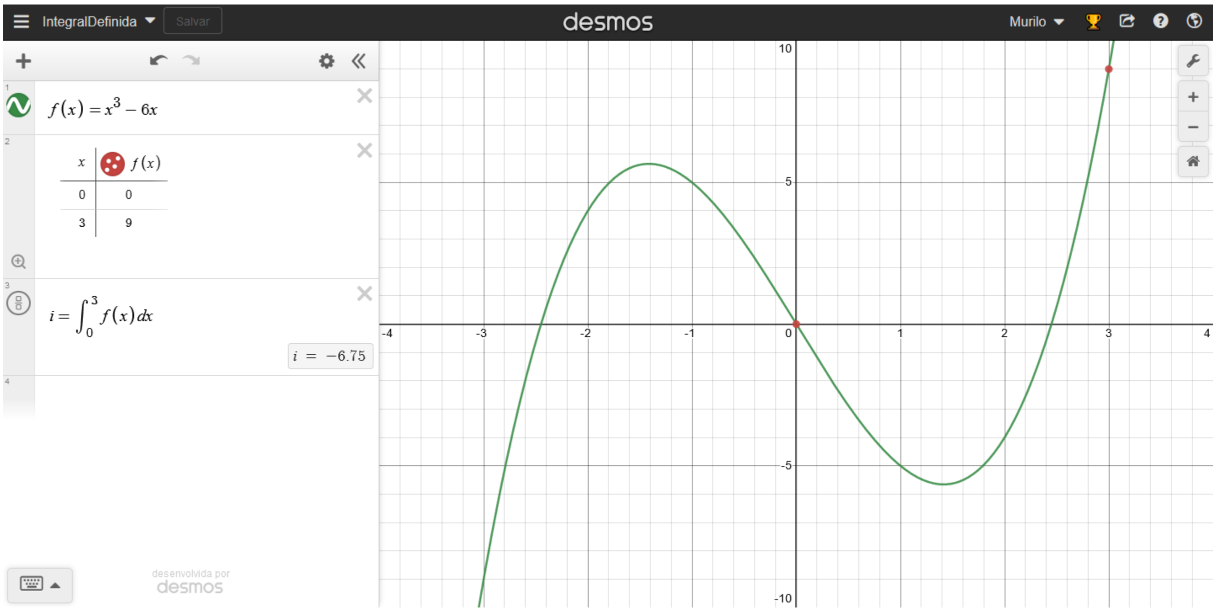


Gráfico 4 – Cálculo de Integral Definida na Calcula Gráfica Desmos

Agora vejamos como fica o cálculo da mesma integral usando o GeoGebra. As etapas para montar a função na calculadora gráfica a seguir são estes:

1º) Digite $f(x) = \int_0^3 x^3 - 6x$ no campo de expressão em branco e tecle Enter;

2º) Vá no campo de *f(x)*, clique em “:”, depois em “Tabela de Valores”, coloque os valores de *x* entre *0* e *3*, e retorne em “Álgebra”;

3º) Clique no símbolo de “teclado” à esquerda, depois “f(x)” e finalmente no símbolo “…”;

4º) No lado de $Funções\ Matemáticas$, clique em $Todos\ os\ Comandos$, deslize o mouse, clique em $IntegralNumérica$ e depois em $"IntegralNumérica(< Função >, < Valor\ de\ x\ Inicial >, < Valor\ de\ x\ Final >)"$;

5º) Troque “a” por “g” da Integral, onde $g = f'(x) = -6{,}75$ *por ter a maior parte da área sombreada abaixo da linha x;*

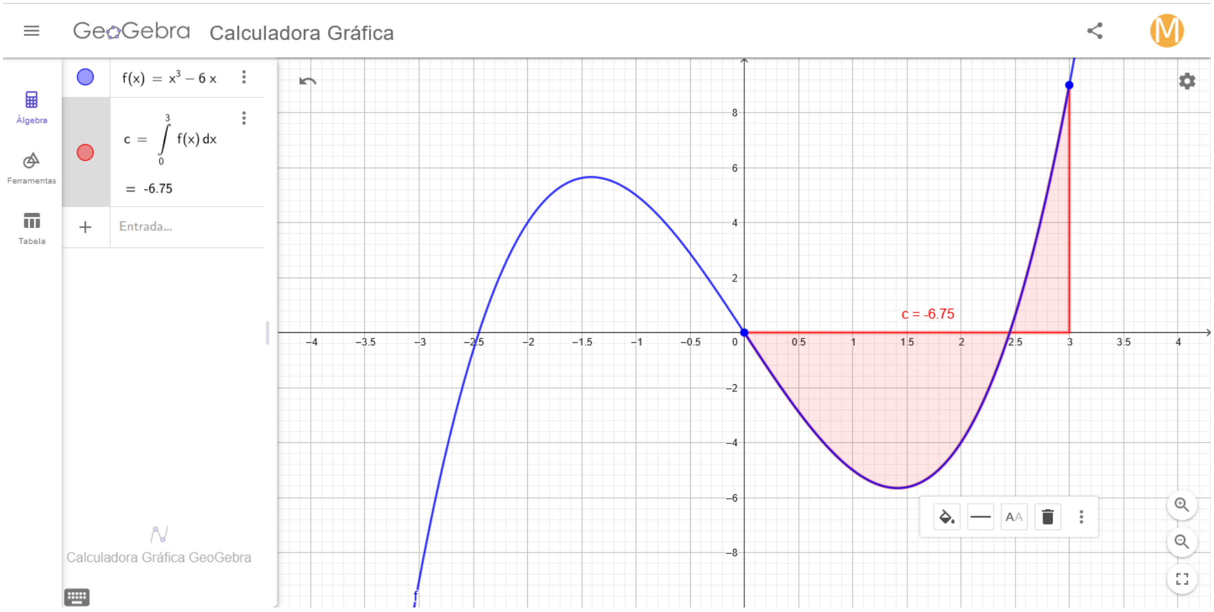


Gráfico 4 – Cálculo de Integral Definida na Calcula Gráfica GeoGebra

As integrais são utilizadas no cálculo da área de uma superfície; cálculo da distância percorrida por um objeto; cálculos de volume, trabalho, potência, pressão, força hidrostática, momentos e centro de massa; valor médio de uma função; localização para sentar-se no cinema; computação algébrica; comprimento do arco da circunferência; cálculo excedente do consumidor; circulação sanguínea e capacidade cardíaca; cálculo de valores médios e distribuição normal.

**Considerações Finais**

Foram encontradas ferramentas tecnológicas e atividades usando softwares matemáticos que contribuam para uma melhor visualização, compreensão e desenvolvimento dos conceitos de Função, Limite, Derivada e Integral. São duas ferramentas chamadas *Desmos* e *GeoGebra*. Consequentemente, estes são semelhantes, pois obtiveram resultados aproximados ao executar o experimento prático, onde é necessário fazer ajustes ao montar uma equação de forma personalizada para cada aplicativo.

No caso de *Limite*, em que somente se usou o GeoGebra, obteve-se o Limite da Função igual a $\frac{1}{2}$ e seus resultados próximos. Quando os valores se aproximam mais de $x = 1$, mais próximos estarão seus respectivos produtos do Limite da Função.

Já no de *Derivada da Função*, ambos softwares obtiveram o mesmo resultado de $f'(x)$ e na substituição de $x$ por 2 que gerou também $f(2)$ e $f'(2)$. Logo, os dois foram boas escolhas.

Enquanto no da *Equação da Reta Tangente*, cujos aplicativos obtiveram a mesma resposta, a curva no plano cartesiano e o ponto *(x,y)* em comum à função *f(x)*. Logo ambos os apps mostraram-se boas opções, porque os dois obtiveram a mesma resposta com visualização igual em cada software.

Por outro lado, ao aplicar a visualização de tabela para ver os pontos $(x, y)$ da função $f(x)$ e sua derivada $f'(x)$, é possível ver somente no Desmos junto com as funções e no GeoGebra, não. Ou seja, somente é vista ao clicar no campo Tabela. Ou seja, o Desmos foi a melhor decisão para visualizar a tabela, porque era possível avistar na mesma tela junto com as funções e o gráfico. E no GeoGebra, não.

Finalmente no cálculo da *integral definida*, onde ambos aplicativos obtiveram o mesmo resultado, o GeoGebra foi a melhor opção, pois demonstrou a Área Sombreada Relacionada à Curva da Função $f(x)$. E o Desmos, não.

Portanto, cada software tem sua particularidade para obter a mesma resposta final ao montar uma expressão a ser efetuada. Contudo, ambos os apps facilitam os cálculos, devido à redução do tempo para executá-los, sendo o “GeoGebra” é o app mais recomendado, por causa da efetuação de cálculos de forma mais completa.

**Referências**

BIANCHINI, Valdeci e SANTOS, Ângela Rocha dos. **Aprendendo Cálculo de Uma Variável**. Instituto de Matemática. RIO DE JANEIRO: Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ), 3 de dezembro de 2018. Disponível em: <http://www.im.ufrj.br/waldecir/calculo1/aprendendocalculo/calculo1.pdf>. Acesso em: 01 set. 2022.

STEWART, James. **Cálculo:** volume 2. SÃO PAULO: Cengage Learning, 7ª ed., 2013.

PARDO, Thiago. **GeoGebra**: Tutorial. NATAL: Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Rio Grande do Norte (IFRN), 2014. Disponível em: <https://docente.ifrn.edu.br/thiagopardo/atividades/tutorial-do-geogebra/view>. Acesso em 15 abr. 2023.

Baixar Aplicativos GeoGebra. **GeoGebra**, c2023. Disponível em: <https://www.geogebra.org/download?lang=pt>. Aplicativos GeoGebra gratuitos para iOS, Android, Windows, Mac, Chromebook e Linux. Acesso em 17 abr. 2023.

Calculadora Gráfica Desmos. **Google Play**, c2022. Disponível em: <https://play.google.com/store/apps/details?id=com.desmos.calculator&hl=pt_BR&gl=US>. Desmos lnc. Acesso em 17 abr. 2023.

Desmos: User Guide. **Amazon AWS**, c2017 Disponível em: <https://s3.amazonaws.com/desmos/Desmos_Calculator_User_Guide.pdf>. Acesso em: 15 abr. 2023.

Funções. **O GeoGebra**, c2014. Disponível em: <https://www.ogeogebra.com.br/arquivos/07-funcoes.pdf>. Acesso em 15 abr. 2023.

Interface e Ferramentas. **O GeoGebra**, c2014. Disponível em: <https://www.ogeogebra.com.br/arquivos/01-interfaceeferramentas.pdf>. Acesso em 15 abr. 2023.

The Desmos Calculator. **CollegeBoard**, c2017. Disponível em: <https://www.redclayschools.com/cms/lib/DE01903704/Centricity/Domain/709/DESMOS%20and%20SAT.pdf>. Acesso em 15 abr. 2023.

**Resumo**: O objetivo deste trabalho é a investigação de calculadoras gráficas, tais como GeoGebra e Desmos, e de que maneira elas podem contribuir para a melhoria do ensino do Cálculo em cursos de graduação, por exemplo. Isso se dará com a criação de atividades, usando esses softwares, que possibilitem ao aluno identificar e compreender o comportamento de uma função de Variável Real. O uso do software para traçar gráficos facilitará a visão gráfica das funções, permitindo uma visão mais geométrica de conceitos como Limite, Derivada e Integral.

**Palavras-chaves**: Cálculo; Ensino de Cálculo; Recursos Tecnológicos.

**Abstract**: The objective of this work is to investigate whether graphing calculators such as GeoGebra and Desmos can contribute to the teaching of calculation in undergraduate courses, for example. This will happen with the creation of activities, using this software, that enable the student to identify and understand the behavior of a Real Variable of a Function. The use of software to plot graphs will facilitate the graphical view of functions, allowing a more geometric view of concepts such as Limit, Derivative and Integral.

**Keywords**: Calculation; Teaching Calculus; Technological Resources.

***Recebido em: 16/12/2023.***

***Aceito em: 10/4/2024.***